

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2021

Mecânica Estatística

28/09/2021 - 13h00 às 16h00

(Escolha três dentre as quatro questões.)

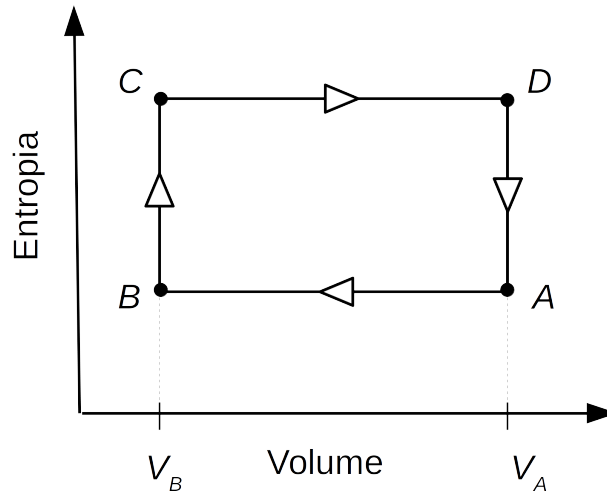
(Não escreva seu nome na prova. Informe apenas o CPF.)

QUESTÃO 1 – TERMODINÂMICA

O comportamento de 1 mol de um gás ideal mantido em um recipiente de volume V , a uma temperatura T , e submetido a uma pressão p , obedece à equação de estado $pV = RT$, onde R é a constante dos gases. A energia interna desse gás é igual a $U = \frac{3}{2}RT$.

- (a) (20%) Determine a variação da entropia S em função do volume e da energia interna, $S = S(U, V)$, quando o gás passa por uma transformação do estado (U_i, V_i) para o estado (U_f, V_f) .
- (b) (20%) Usando a 1ª Lei da Termodinâmica, mostre que em um processo adiabático reversível $TV^{2/3} \equiv \text{const.}$.

Esse gás é usado como substância de trabalho de uma máquina térmica e sofre o processo cíclico representado na figura abaixo.



- (c) (30%) (i) Esboce os diagramas $p-V$ e $T-S$ para o ciclo; e (ii) identifique nesses diagramas os trechos em que a máquina absorve calor do ambiente ou libera calor para o ambiente.
- (d) (10%) Escreva o calor absorvido do ambiente $|Q_{abs}|$ e o calor liberado para o ambiente $|Q_{lib}|$ como função de T_A , T_B , T_C e T_D , que são as temperaturas correspondentes aos pontos A , B , C e D , respectivamente, do diagrama $S-V$.
- (e) (20%) Mostre que a eficiência térmica ε da máquina é dada por

$$\varepsilon = 1 - \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

QUESTÃO 2 – ENSEMBLE CANÔNICO

A atmosfera de um planeta consiste em um gás rarefeito composto por moléculas monoatômicas de massa m . Assuma, por simplicidade, que tanto a aceleração gravitacional do planeta, g , como a temperatura T , podem ser aproximados como constantes em toda a atmosfera. Para estudar as propriedades do gás, considere uma amostra de volume V (com base de área A e altura d) deste gás a uma altura z da superfície do planeta.

- (a) (35%) Mostre que a função de partição Z_N no *ensemble canônico* da amostra a uma altura z da superfície do planeta é dada por

$$Z_N = \frac{1}{N!} \left[\frac{k_B T}{mg} \frac{A}{\lambda_T^3} e^{-mgz/k_B T} \left(1 - e^{-mgd/k_B T} \right) \right]^N,$$

onde λ_T é o comprimento de onda térmico das moléculas do gás, N é o número de moléculas na amostra e k_B é a constante de Boltzmann.

Considere o caso em que $d \ll k_B T/mg$ (amostra pequena).

- (b) (35%) Calcule a energia média por partícula do sistema.
- (c) (30%) Determine como a densidade do gás varia com a altura z .

Expresse suas respostas em termos das grandezas dadas.

Dados:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

QUESTÃO 3 – APLICAÇÕES DA ESTATÍSTICA DE BOSE-EINSTEIN

Considere modos coletivos em sólidos que se propagam como ondas. O hamiltoniano do sistema é dado por $\mathcal{H} = \sum_{j=1}^N \hbar \omega_j \left(n_j + \frac{1}{2} \right)$, onde ω_j é a frequência angular do j -ésimo modo. Para N modos coletivos, obtenha, em termos de ω_j e da temperatura T :

- (a) (25%) A função de partição do sistema.
- (b) (25%) A energia média.

Suponha agora que $N \rightarrow \infty$. Neste caso, a densidade de estados com vetor de onda \vec{q} em um volume $d\vec{q}$ é $d^3q/(2\pi)^3$, de maneira que $\sum_{\vec{q}} \rightarrow V \int 4\pi q^2 dq / (2\pi)^3$, onde V é o volume do sistema. Os modos coletivos obedecem à relação de dispersão $\omega = Aq^\alpha$, onde A e α são constantes (por exemplo, $\alpha = 1$ para fônons e $\alpha = 2$ para mágnons).

- (c) (25%) Mostre que a energia média é dada por:

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar V}{4\pi^2 \alpha A^{3/\alpha}} \int_0^{\omega_c} \left(\frac{1 + e^{-\hbar\omega/k_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}} \right) \omega^{3/\alpha} d\omega,$$

onde ω_c é uma frequência de corte (frequência de Debye, no caso de fônons) e k_B é a constante de Boltzmann.

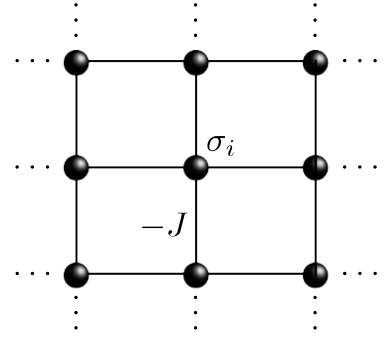
- (d) (25%) Determine, no regime de baixas temperaturas, a dependência do calor específico com T . Não é necessário resolver a integral.

QUESTÃO 4 – SISTEMAS FORTEMENTE INTERAGENTES

Considere o modelo de Ising em uma rede quadrada com N sítios. O hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i,$$

onde $\sigma_i = \pm 1$ indica a orientação da componente z do spin no sítio i , h é o campo magnético na direção z , em unidades convenientes, enquanto a interação entre os spins é $-J$, com $J > 0$, e o símbolo $\langle i, j \rangle$ indica sítios i e j que são primeiros vizinhos, veja a ilustração ao lado.



- (a) (20%) Determine a entropia total S em função de N e do spin total adimensional $M = N_+ - N_-$, onde N_+ é o número de spins com componente $+1$ e N_- o número de spins com componente -1 . Assuma que todas as configurações com N_+ e N_- fixos são igualmente prováveis.

- (b) (10%) Mostre que no limite termodinâmico, $N \rightarrow \infty$, a entropia por spin $s = S/N$ em função de $m = M/N$, magnetização média por sítio, é dada por

$$s = k_B \ln 2 - \frac{k_B}{2} [(1+m) \ln(1+m) + (1-m) \ln(1-m)],$$

onde k_B é a constante de Boltzmann.

- (c) (30%) Encontre a energia interna $U = \langle \mathcal{H} \rangle$ por spin no limite termodinâmico em função de m e h para m fixo admitindo que $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$ (aproximação de campo médio), onde as médias $\langle \dots \rangle$ são realizadas sobre todas as configurações com magnetização m .

- (d) (15%) Determine f , a energia livre de Helmholtz por spin, no limite termodinâmico, em função de m , h e da temperatura T .

- (e) (25%) Minimize f em relação a m para estabelecer a relação

$$m = \tanh(4\beta Jm + \beta h),$$

equação de Curie-Weiss para a magnetização, onde $\beta \equiv 1/k_B T$.